三角数，四角数の和

$\sum$に関する公式について，三角数，四角数から考えてみよう。

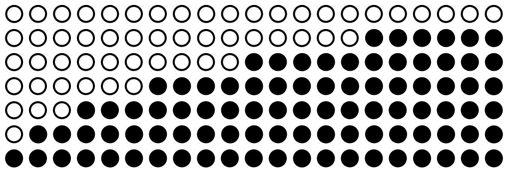
n 番目の三角数（triangular numbers）を T_n，n 番目の四角数（quadrilateral numbers）を S_n とする。

$T_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$，$S_n=n^2$ であることは，容易に読み取ることができる。

$\sum_{k=1}^{n}k^2$ は，1 番目の四角数から n 番目の四角数までの和である。

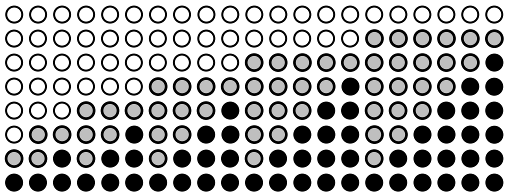
これを図で表すとすれば，図Ⅰの ● のようになる。欠けているところを補うように三角数を並べて，図Ⅰのように長方形状に点を配置することができる。図Ⅰの総数は，

$T_1+T_2+\cdots+T_6+S_1+S_2+\cdots+S_6$ である。



図Ⅰ

また，三角数の和 $T_1+T_2+\cdots+T_6$ については，図Ⅱのように並べることにより，調べることができる。図Ⅰでは，横の個数は T_6 個で，縦の個数は 7 個，図Ⅱでは横の個数が T_6 個で，縦の個数は 8 個である。



図Ⅱ

これを一般の n について考えると，図Ⅰでは，

$$T_1+T_2+\cdots\cdots+T_n+S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$$
$$=(n+1)T_n=\frac{1}{2}n(n+1)^2 \quad \cdots①$$

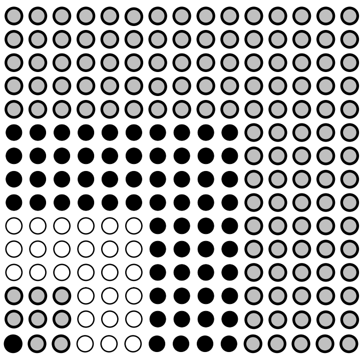
となる。図Ⅱでは，

$$3(T_1+T_2+\cdots\cdots+T_n)$$
$$=(n+2)T_n=\frac{1}{2}n(n+1)(n+2) \quad \cdots②$$

②より，$T_1+T_2+\cdots\cdots+T_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

であるから，①に代入して，

$$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$



図Ⅲ

が得られる。また，図Ⅲより関係 $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$ がすぐにわかる。

その他にも，三角数や四角数などを組み合わせることで，数列の和が求められる場合がある。